ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Φυλλάδιο 1

1 Γραμμική ανεξαρτησία

Άσκηση 1.1 Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα διανύσματα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_3$, $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 1.2 Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, εξετάστε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3$ είναι

(α) γραμμικώς ανεξάρτητα,

(β) γραμμικώς εξαρτημένα.

Άσκηση 1.3 Να αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$, $\vec{v}_2 = (1, -2, 0)$ και $\vec{v}_3 = (3, -3, 4)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Να βρείτε ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

Άσκηση 1.4 Να αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$ και $\vec{v}_3 = (0, -3, 2)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{v} = (1, 2, 3)$ ως προς τη βάση αυτή.

Άσκηση 1.5 Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ του $\mathbb{R}^3$ δεν είναι συγγραμμικά, να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί μ και ν έτσι ώστε

$$(2\mu + \nu - 3)\vec{v}_1 + (\mu - \nu)\vec{v}_2 = 0$$

Άσκηση 1.6 Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ του $\mathbb{R}^3$ δεν είναι συνεπίπεδα, να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί λ, μ, ν έτσι ώστε

$$(\lambda + \mu + \nu - 6)\vec{v}_1 + (\lambda - \mu)\vec{v}_2 + (\mu - \nu)\vec{v}_3 = 0$$

Άσκηση 1.7 Αν το $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετο σε τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα, τότε να δείξετε ότι $\vec{v} = 0$.

Άσκηση 1.8 Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης $g(x, y, z) = x - y + 3z$, όταν τα x, y, z πληρούν την εξίσωση $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Άσκηση 1.9 Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2\Big)$$

για κάθε $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.